線形計画法に基づいた腐食水圧鉄管の極限解析

LIMIT ANALYSIS OF AGING PENSTOCKS BASED ON LINEAR PROGRAMMING

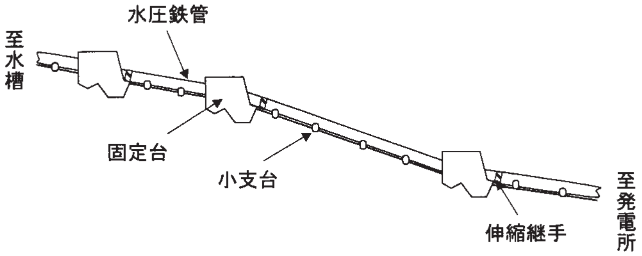
師　自海*・桜井達朗*・中野雅章*
Zihai SHI, Tatsuro SAKURAI and Masaaki NAKANO

For the limit analysis of aging penstocks in hydroelectric power stations, neither analytical approach nor the finite element method is readily applicable because of the large sizes and complex failure modes. The present paper shows that the linear programming method （LP） is quite effective for this kind of problems, and thus the problem of an aging penstock is solved by combination of LP and an analytical method. In the analysis, influencing factors to the limit states such as pipe thickness and length between anchor blocks are discussed. Based on the limit loads, a quantitative method for assessing the structural stability of aging penstocks is proposed.

Key Words： *penstock, hydroelectric power stations, corrosion, limit state analysis, linear programming, structural stability*

１．はじめに

図－１に示す水力発電設備における水圧鉄管は、水力発電に必要な落差を伝える構造物であり、常時圧力水頭を持った流水が通過する水力発電設備の主要設備の一つである。このように水圧鉄管は、常時水にさらされているため、経年とともに腐食･摩耗が発生･進行し、それに伴って板厚が減少するなど、長期的には水圧鉄管の構造安定性に何らかの影響を及ぼす劣化が予想される。従って、経済性を追求し、水圧鉄管の延命化を図る情勢の中で、腐食した鉄管の構造安定性に関する定性的および定量的な評価は必要かつ不可欠と考えられる。現実的には、水圧鉄管の構造安定性に影響する要因は、管内空虚時の限界座屈、振動などを含めて複雑であり、総合的な検討が必要である。本研究では、水圧鉄管の構造安定性について、内水圧を受ける円筒シェルの極限解析の問題として取り扱い、腐食による板厚の減少時の塑性崩壊荷重の低減に着目した。



図－１　水圧鉄管の例

＊　中央研究所　開発研究部

内圧を受ける円筒シェルの構造安定性に関する極限解析の問題は、塑性理論に基づく解析的なアプローチと数理計画法の手法を用いた研究が大半を占めている。Hodge[1), 2)]の研究成果を代表とする解析的な手法は、与えられた境界条件、荷重、降伏条件に対して、適切な塑性領域または破壊メカニズムを選定する必要があるため、破壊形態の比較的単純な問題に限られる[3)～5)]。例えば、固定台間隔が数十メートルにも達し、その上区間内で異なる設計板厚を有する水圧鉄管への適用は困難である。一方、Tin-Loiら[6)～8)]が提案した数理計画法によるアプローチは、問題の釣り合い条件式、境界条件および降伏曲線を離散化、線形化することによって、極限解析に関する問題を通常の線形計画法（LP）の問題に変換することができる。この手法は、応力場や崩壊機構について事前に検討する必要がないため、力学的な取り扱いが簡便であり、かつシステム化しやすいという特徴がある。従って、水圧鉄管のような、規模が大きく、破壊形態が複雑である問題にも適用可能である。しかし、塑性崩壊荷重以外に得られる情報量が少なく、特に塑性変形に関する定量的な情報が得られない。

そこで、本研究では、内水圧下における腐食水圧鉄管の極限解析の問題に対して、塑性崩壊荷重と変形の両者を解析する手法を提案する。それは、線形計画法により塑性崩壊荷重を算定し、塑性崩壊時において降伏した節点の内力を変形に関する理論解に代入し塑性変形量を求める、というアプローチである。応用事例として、水力発電所の腐食水圧鉄管に適用し、板厚の減少および固定台間隔の影響等を含めて水圧鉄管の塑性崩壊状態について検討した。さらに、求められた塑性崩壊荷重を用いて、水圧鉄管の構造安定性に関する定量的な評価方法を提案した。

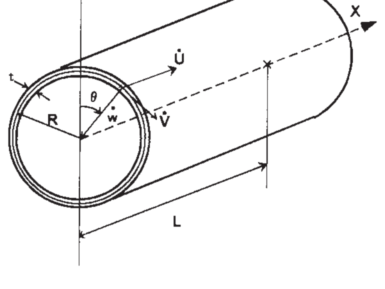
２．塑性崩壊荷重

水圧鉄管の塑性崩壊荷重に関するLPに基づいた定式化は、内力の釣り合い式に、境界条件、降伏条件を加え、連続である各条件式を離散化、線形化するプロセスから成る。この定式化を以下に示す。

(1) 釣り合い条件式

図－２に示すように、固定台間隔L、半径R、板厚tを持つ水圧鉄管を想定する。この円筒シェルは、完全塑性を有する均質等方性の材料から成り、作用荷重は内水圧のみで、自重、温度変化などによる管軸方向に働く外力を受けないものとする。それは、通常水圧鉄管の固定台の間に多数の小支台を設けるため、自重による曲げモーメントが小さいこと、また伸縮継手が設置されるため、管軸方向に発生する外力が常に解放されるためである。内水圧Pを受ける微小シェル要素に作用する断面力および円筒座標系（X，θ，r）を**図－３**に示す。ここでは板厚、変位に関する薄肉シェル理論の諸基本仮定が成り立つものとする。次に、釣り合い式について簡単に述べる。より詳細な理論展開については参考文献に委ねる[1), 9)]。問題の対称性を考慮し、内水圧に関する力の釣り合い、また管軸方向の曲げモーメントに関する釣り合いは、それぞれ式(1)と(2)となる。

$$\frac{dS_x}{dX}+\frac{N_\theta}{R}-P=0 \tag{1}$$



図－２　水圧鉄管の寸法および円筒座標系

$$\frac{dM_x}{dX}-S_x=0 \tag{2}$$

上記の式からせん断力S_xを消去すると、内力に関する釣り合いは次のようになる。

$$\frac{d^2M_x}{dX^2}+\frac{N_\theta}{R}-P=0 \tag{3}$$

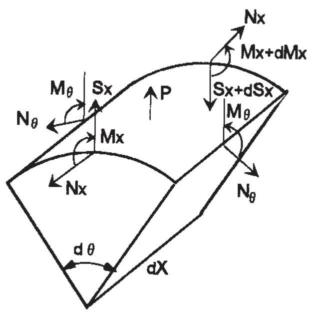
式(3)に対して、無次元変数$n=N_\theta/N_0$、$m=M_x/M_0$、$p=PR/\sigma_0 t$および$x=X/L$、また無次元シェルパラメータ$\alpha^2=2L^2/Rt$を採用し、無次元化する。ここに、$N_0=\sigma_0 t$、$M=\sigma_0 t^2/4$、およびσ_0は材料の降伏応力を表す。従って、式(3)は、次のように書き換えられる。

$$\frac{d^2m}{dx^2}+2\alpha^2(n-p)=0 \tag{4}$$

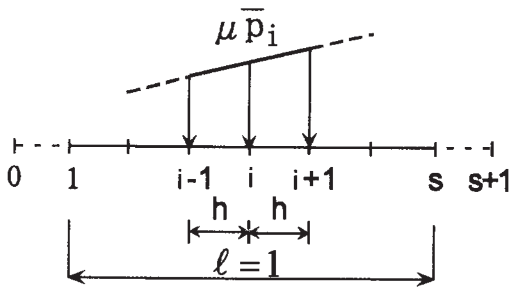
(2) 釣り合い式および境界条件の離散化

釣り合い式(4)に関する離散化はTin-Loiら[6)]が提案した中点差分法を採用する。**図－４**に示すように、無次元長さl=1の円筒シェルを、間隔ｈでｎ等分する。区間［０，１］において無次元モーメント$m(x)$の二次微分は次のように差分で表すことができる。

$$\frac{d^2m(x)}{dx^2}=\frac{m(x+h)-2m(x)+m(x-h)}{h^2}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2h^{2i}}{(2i+2)!}+\frac{d^{(2i+2)}m(x)}{dx^{(2i+2)}} \tag{5}$$



図－３　水圧を受ける微小シェル要素の釣り合い



図－４　差分法によるアプローチ

式(5)の第二項$O(h^2)$を無視し、式(4)に代入すると、任意の節点iに関する釣り合い式は次のようになる。

$$\frac{m_{i-1}-2m_i+m_{i+1}}{h^2}+2\alpha^2(n_i-\mu\bar{p}_i)=0\ ;\quad i=1、\cdots、s \tag{6}$$

ここに、節点０と(s＋１)は、差分法において使われるダミー点である。またμは無次元設計水圧$\bar{p}_i$に関する荷重係数である。

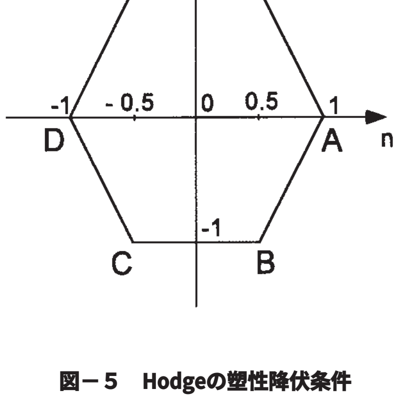
数値解析の精度を上げるためには、差分近似式の間隔hを細分する必要がある。しかし、hを極端に小さくすると、差分近似式の有効桁数が落ちてしまい、丸め誤差の方が数値解析の精度を支配してしまう恐れがある。そこで、真の$m(x)$に関する数値解析の結果$\bar{m}(x)$の誤差範囲はRと仮定すると、$\bar{m}(x)=(1+r)m(x)$、$|r|\leq R$。これにより、式(6)の差分近似式の誤差範囲は$4R/h^2$となり、この誤差をε以下に収めるために、$h^2>4R/\varepsilon$の条件が必要となる。

境界条件については、自由端、単純支持および固定支持の三種類がある。自由端では曲げモーメントとせん断力がゼロであり、一方、単純支持端では曲げモーメントがゼロである。固定支持の場合には、内力については無制約である。

(3) 降伏条件の線形化

一般化応力(n, m)に関するvon Misesの降伏条件の六角形近似を**図－５**および式(7)に示す[1),2),10)]。

$$\begin{aligned}
AB&: 2n-m-2=0\\
BC&: m+1=0\\
CD&: 2n+m+2=0\\
DE&: 2n-m+2=0\\
EF&: m-1=0\\
FA&: 2n+m-2=0
\end{aligned} \tag{7}$$



図－５　Hodgeの塑性降伏条件

Tin-Loiら[6)]が指摘したように、この降伏条件式をこのままの形でLPの問題に適用するのは難しい。そのため、六角形の頂点と中間変数の線形組み合わせによって、$i=1$, …, sとなる構造体のすべての節点について、降伏基準を次のように変換する[11),12)]。

$$Q^i=V^i\xi^i,\ i=1,\cdots,s \tag{8a}$$

ここに、上式における節点に関する各成分は次のようになる。

$$Q^{iT}=(n_i,m_i) \tag{8b}$$

$$V^i=\begin{bmatrix}1 & 0.5 & -0.5 & -1 & -0.5 & 0.5\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{8c}$$

$$\xi^iT=(\xi^i_1,\xi^i_2,\xi^i_3,\xi^i_4,\xi^i_5,\xi^i_6) \tag{8d}$$

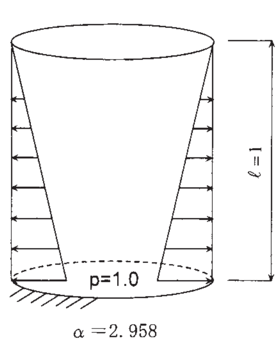
$$\xi^{iT}_k\geqq 0,\ k=1,\cdots,6\ ;\ \sum_{k=1}^{6}\xi^i_k\leq 1 \tag{8e}$$

(4) 線形計画法による定式化

塑性理論の下界定理の適用には、力の釣り合い条件と降伏条件の双方を満たす範囲において、荷重係数μを最大化する必要がある。

目的関数：$Z=max[\mu]$
制約条件：式(6)、式(8)と境界条件　(9)

式(9)は、目的関数とすべての制約条件が線形であることから、変数μ、$\boldsymbol{Q}$とξに関するLPの問題である。μとξは、負でない変数であり、一方、$\boldsymbol{Q}$に関する制限はない。ただし、同式は節点以外の点において成り立つ保証がないため、求められた荷重係数は下界値とは限らない。しかし、差分近似式の間隔hを適当に細分することにより、解の精度を向上することができる。



図－６　検証事例

表－１　等分割数によるLP解析の精度

等分割数(n)	4	8	16	24	80
等分間隔(h)	0.25	0.125	0.0625	0.041667	0.0125
限界荷重係数（μｃ）	2.58866	2.63524	2.62765	2.627011	2.62678
誤差（%）	-1.4595	0.3137	0.0247	0.0004	-0.0084
理論解　μｃ＝2.627					

図－６に示すように、片端自由、片端固定の静水圧における円筒シェルに関する極限荷重の問題はCinquiniら[9]が理論解により、またTin-Loiら[6]がLPの手法によって求めた。この問題（$\alpha=2.958$）を検証事例として式(9)を解析した結果を、**表－１**に示す。各分割のケースに対してLPによる数値解を求め、理論解の$\mu_c=2.627$と比較することにより、解の高精度について確認した。この問題に関しては、80等分以上の分割は差分近似式の有効桁数が減少するため、かえって数値解析の精度を低減させてしまうことも認められる。なお、本研究の数値解析事例においては数理計画法の汎用ソフトとして知られるGAMS[14]を用いた。

３．塑性崩壊状態における塑性変形

一般化応力$(n,\ m)$に対応する一般化ひずみを算出するために、シェル要素に対する単位面積当たりのひずみエネルギーを求める。**図－２**と**図－３**を参照し、シェルの中央面を基準に任意の点Ｚにおける変位は次のようになる。

$$\dot{U}_x=\dot{U}+Z\frac{d\dot{W}}{dX} \tag{10a}$$

$$\dot{U}_\theta=0 \tag{10b}$$

$$\dot{U}_r=-\dot{W} \tag{10c}$$

ここに Z は中央面から外向きに正とする。この問題における非零ひずみ成分は次の$\dot{\varepsilon}_x$、$\dot{\varepsilon}_\theta$のみである。

$$\dot{\varepsilon}_x=\frac{d\dot{U}}{dX}+Z\frac{d^2\dot{W}}{dX^2} \tag{11a}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta=-\frac{\dot{W}}{R} \tag{11b}$$

従って、ひずみエネルギーは

$$\begin{aligned}D&=\int(\sigma_x\dot{\varepsilon}_x+\sigma_\theta\dot{\varepsilon}_\theta)\,dZ\\&=\frac{d\dot{U}}{dX}\int\sigma_x dZ-\frac{d^2\dot{W}}{dX^2}\int(-Z\sigma_x)\,dZ-\frac{\dot{W}}{R}\int\sigma_\theta\,dZ\\&=\frac{d\dot{U}}{dX}N_x-\frac{d^2\dot{W}}{dX^2}M_x-\frac{\dot{W}}{R}N_\theta\end{aligned} \tag{12a}$$

管軸方向に働く外力がゼロと想定したため、軸方向の釣り合いから$N_x=0$になる。既に導入した無次元変数以外に、さらに無次元変数$\dot{w}=\dot{W}/R$を採用すると、式(12a)は次のように変換される。

$$D=\sigma_0 t\left(-\frac{\dot{w}''}{2\alpha^2}m-\dot{w}n\right) \tag{12b}$$

Hodge[2]は、この式に基づいて一般化ひずみ速度ベクトルを次のように定義した。

$$\dot{q}=\left(-\dot{w},\ -\frac{\dot{w}''}{2\alpha^2}\right) \tag{13}$$

降伏後の流れ則から、このひずみ速度ベクトルは式(7)に示す六角形の降伏条件の各辺に垂直となることが分かる。このように定められたに$\dot{w}$に関する微分方程式を解くと、次のような解が求められる。

$$\begin{aligned}&AB:\dot{w}(x)=C_1\sin\alpha x+C_2\cos\alpha x\\&CD:\dot{w}(x)=C_3\sinh\alpha x+C_4\cosh\alpha x\\&DE:\dot{w}(x)=C_5\sin\alpha x+C_6\cos\alpha x\\&FA:\dot{w}(x)=C_7\sinh\alpha x+C_8\cosh\alpha x\\&BC,EF:\dot{w}(x)=0\end{aligned} \tag{14}$$

ただし、C_1からC_8は積分定数である。一方、塑性理論に関しては、Prandtl-Reussの式[13]として知られる次の関係が存在する。

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\sigma'_{ij} \tag{15}$$

ここに$d\varepsilon_{ij}^p$は塑性ひずみ、σ'_{ij}は等方性応力（静水圧）を除く偏差応力である。$d\lambda$は正の比例係数であり、通常応力状態および載荷履歴に依存する。従って、一般化ひずみ速度$\dot{w}$と一般化応力nとの間に次の関係が導かれる。

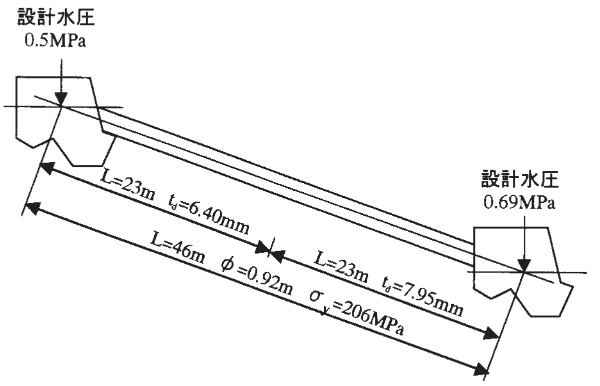
$$\dot{w}=d\lambda n'=d\lambda(n-p) \tag{16}$$

ここに p は無次元静水圧である。式(14)と比較すると、降伏曲線上で$d\lambda$は定数となることが分かる。式(16)は、水圧鉄管のような、Lが長く無次元シェルパラメータαが非常に大きい問題における塑性変形量を求めるのに有効である。

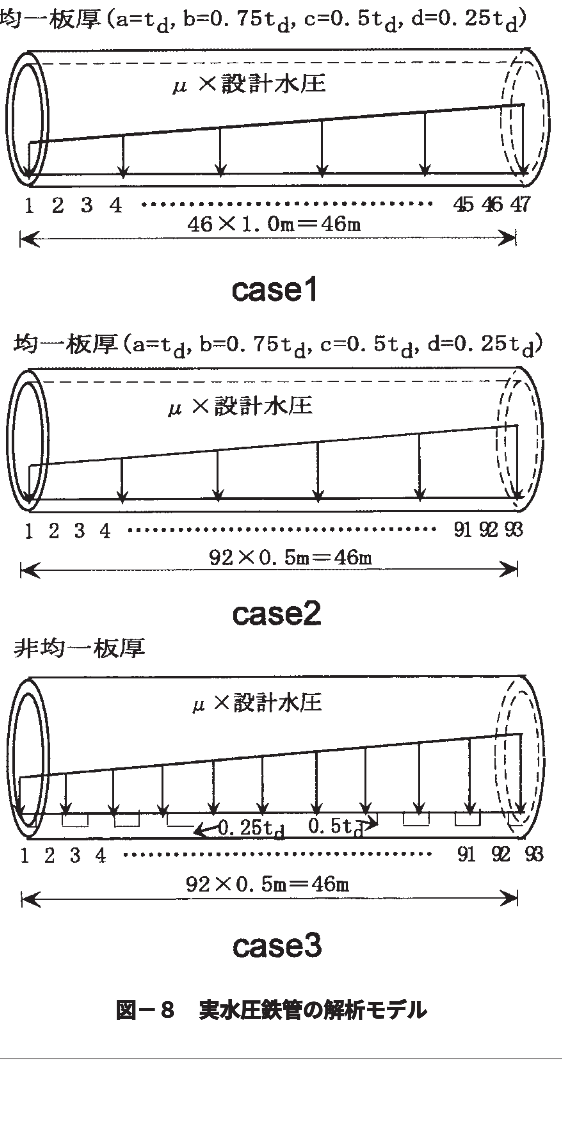
式(16)は釣り合い式および降伏後の流れ則からも導くことができる。その証明については付録に示す。

４．水圧鉄管に関する極限解析

水力発電所の水圧鉄管を対象に、応力線図に基づき応力的に最も厳しい区間に対して、均一板厚モデルと非均一板厚モデルの二種類に分類し極限解析を行った。均一板厚モデルに関しては四種類の板厚（設計板厚t_d、$0.75t_d$、$0.5t_d$、 0.25td）を持つモデルとする。一方、非均一板厚モデルにおいては、二種類の板厚（0.25tdと0.5td）を管軸方向に交互に変化させるモデルである。また、均一板厚モデルに関しては、二種類のメッシュサイズ（ΔL＝1.0mとΔL＝0.5m）を用いて、解の安定性を確認した。なお、固定台に対応する支持条件は固定支持とする。解析条件および解析モデルを**図－７**と**図－８**に示す。

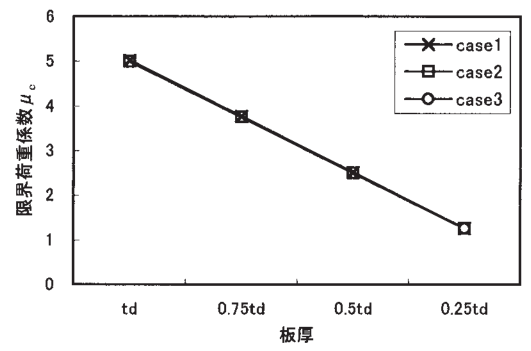


図－７　実水圧鉄管の解析条件



図－８　実水圧鉄管の解析モデル

限界荷重係数μ_C（＝塑性崩壊荷重/設計荷重）と板厚の関係を**図－９**に表す。同図から、これらのモデルでは数値解析の結果に関するメッシュサイズの影響はほとんど見られず、解の安定性が非常に高いことが分かる。限界荷重係数は設計板厚tdを用いた場合、つまり腐食が全く進行していない場合は約5.0である。しかし、腐食により板厚が減少するにつれて、限界荷重係数も次第に低減し、0.75td、0.5td、0.25tdの板厚に対して、それぞれ3.7、2.5、1.2となる。**図－９**から分かるようにこの関係は線形である。次に、板厚を節点ごとに交互に0.25td、0.5tdと変化させる場合は、限界荷重係数は板厚が均一に0.25tdとなる場合の限界荷重係数とほぼ変わらないことに注目したい。これは塑性崩壊荷重が応力的に最も厳しい断面に支配されることを意味する。塑性崩壊時の各ケースの内力状態を示す**図－10**からも分かるように、均一板厚モデルの場合は、ほぼ全節点が降伏、あるいは降伏に近い状態にあるのに対し、非均一板厚モデルの場合は、板厚の厚い節点（偶数節点）の大部分が塑性面からほど遠い弾性域内にとどまっている。ここで仮に板厚調査により、最小板厚と設計板厚との比率は0.63であったとすると、**図－９**に示す限界荷重係数と板厚との線形関係から、限界荷重係数は約3.1となることが分かる。



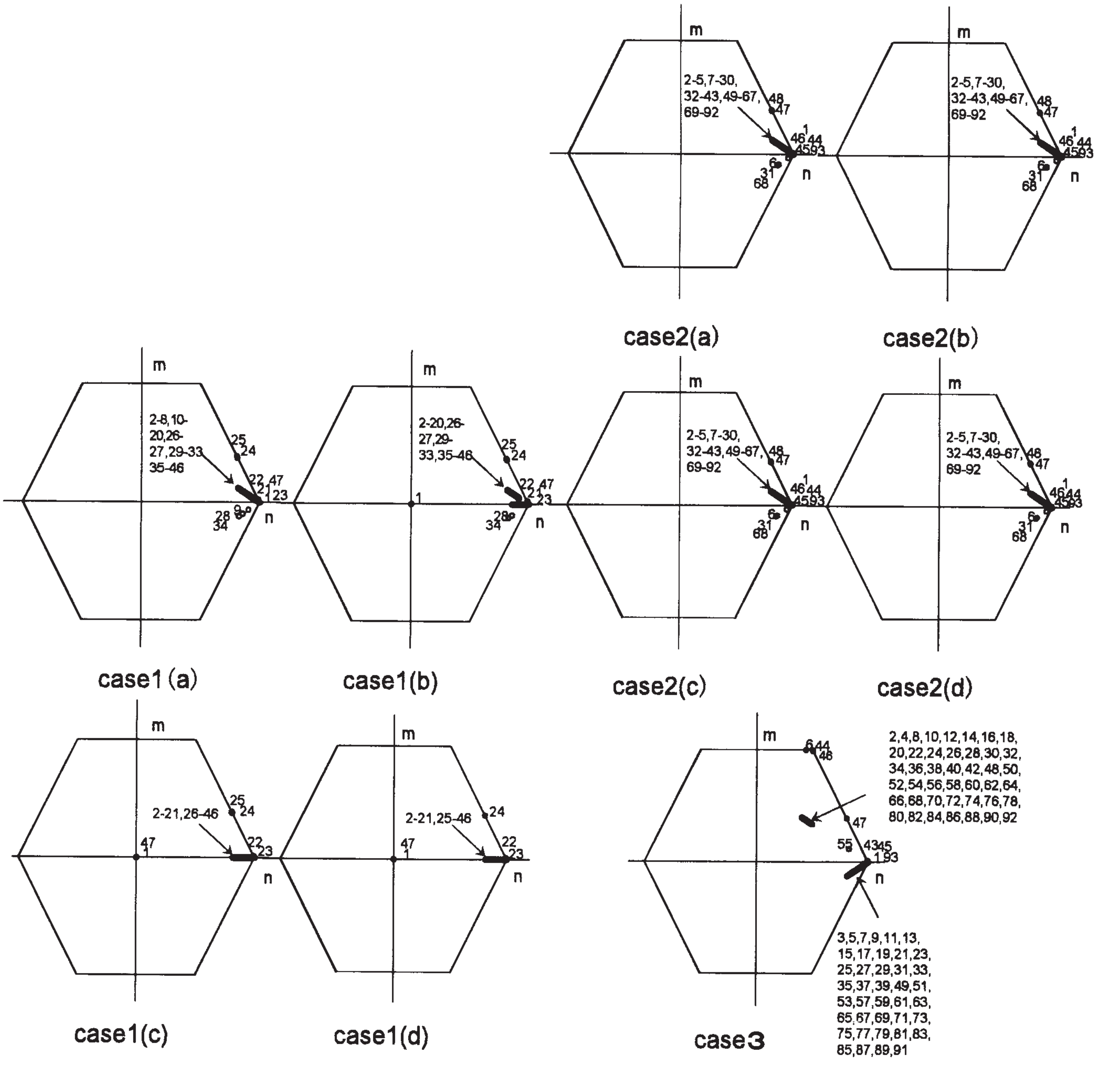
図－９　限界荷重係数と板厚の関係

表－２に塑性崩壊状態をもたらした各降伏した節点での内力状態、塑性変形量および塑性崩壊形態を示す。同表から分かるように、塑性崩壊はある節点での円周方向の引張応力が降伏応力に達する時点（n＝１）から始まる。この最初に降伏した節点においては、塑性変形$\dot{w}$の符号が必ず負であり、内水圧の作用下において最初の塑性変形が外側へ膨張していることを示している。管全体の塑性崩壊は、その後の幾つかの隣接節点での材料降伏と同時に発生すると推定できる。また、**表－２**に示す塑性崩壊形態図から分かるように、ケース３における降伏関節円（m＝１）を除けば、降伏が生じる節点がほぼ管長の中央部に集中している。このことは、固定台間の水圧鉄管の長さがある程度あれば、極限状態に対する両端部の支持条件の影響は極めて小さい

ものであるといえる。それは、上記の各ケースの支持条件を固定から自由に変更しても**図－９**に示す限界荷重係数は全く変わらなかったことからも確かめられた。上記の水力発電所の水圧鉄管を対象に、前述の解析プロセスを踏まえて、各固定台間の鉄管に関する極限解析を行い、**図－11**に示す各板厚における限界荷重係数と固定台間隔の関係を求めた。同図から分かるように、各区間における設計水圧及び、設計板厚が異なるため、水圧鉄管の塑性崩壊荷重は板厚と固定台間隔に大きく依存する。このような図を事前に作成し、現状の板厚と固定台間隔より、水圧鉄管の塑性崩壊荷重を簡易に評価することができる。ここで、板厚の減少による限界荷重係数の低減に着目し、塑性崩壊状態を表す$\mu=1.0$を基準に、構造安定性に関する評価式を提案する。

$$\gamma=\frac{\mu_{cp}-1.0}{\mu_{cd}-1.0} \text{ および } \gamma \geq \gamma_{\min} \qquad (17)$$

ここに、μ_{cd}＝設計時の限界荷重係数；μ_{cp}＝現状での限界荷重係数；γ＝構造安定性余裕度；γ_{min}＝限界構造安定性余裕度。限界構造安定性余裕度γ_{min}に関しては水圧鉄管の設計思想を含む工学的な総合判断に基づき定めるものとする。**図－11**より算出した構造安全性余裕度を**図－12**に示す。同図から分かるように、限界荷重係数と異なり構造安定性余裕度は固定台間隔に強く依存しない。これは式



図－10　塑性崩壊時における各節点の内力

表－２　塑性崩壊時における各降伏点の内力、変形および変形形態

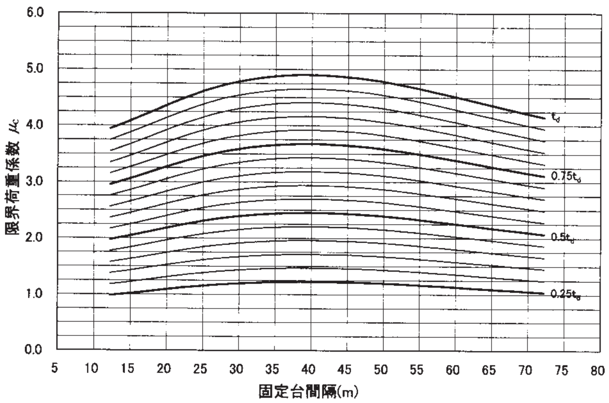
降伏点番号	case1(a) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{23}\rvert}$	塑性変形形態 外部圧縮	内部膨張	case1(b) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{23}\rvert}$	塑性変形形態 外部圧縮	内部膨張
21	0.987	0.026	4.713×10^{-5}	0.17	✕		0.987	0.026	1.157×10^{-4}	0.56	✕	
22	0.994	0.013	3.834×10^{-4}	1.4	✕		0.994	0.013	4.568×10^{-4}	2.22	✕	
23	1	0	-2.753×10^{-4}	-1		◇	1	0	-2.060×10^{-4}	-1		◇
24	0.806	0.389	7.013×10^{-4}	2.55	✕		0.806	0.389	6.772×10^{-4}	3.29	✕	
25	0.811	0.378	3.753×10^{-4}	1.36	✕		0.811	0.378	3.485×10^{-4}	1.69	✕	
	1　21 22 23 24 25　47						1　21 22 23 24 25　47					

降伏点番号	case1(c) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{23}\rvert}$	外部圧縮	内部膨張	case1(d) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{23}\rvert}$	外部圧縮	内部膨張
22	0.993	0.013	-4.753×10^{-4}	-3.51		◇	0.993	0.013	-4.053×10^{-4}	-6.26		◇
23	1	0	-1.356×10^{-4}	-1		◇	1	0	-6.470×10^{-5}	-1		◇
24	0.805	0.389	-1.837×10^{-4}	-1.36		◇	0.806	0.389	6.202×10^{-4}	9.59	✕	
25	0.811	0.379	4.886×10^{-4}	3.6	✕							
	1　22 23 24 25　47						1　22 23 24　47					

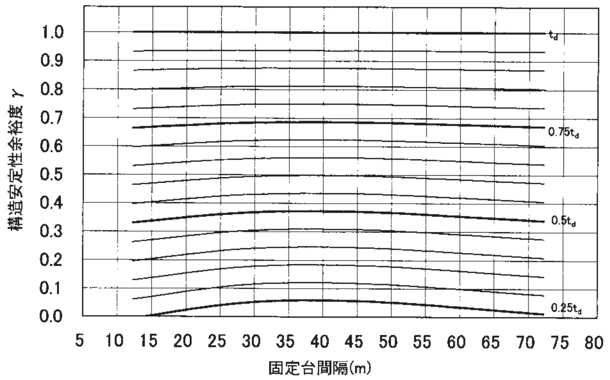
降伏点番号	case2(a) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{46}\rvert}$	塑性変形形態 外部圧縮	内部膨張	case2(b) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{46}\rvert}$	塑性変形形態 外部圧縮	内部膨張
44	0.995	0.011	5.418×10^{-4}	0.49	✕		0.994	0.012	-1.892×10^{-4}	-0.23		◇
45	0.998	0.004	2.182×10^{-4}	0.2	✕		0.998	0.005	4.903×10^{-4}	0.59	✕	
46	1	0	-1.105×10^{-3}	-1		◇	1	0	-8.302×10^{-4}	-1		◇
47	0.805	0.391	1.709×10^{-3}	1.55	✕		0.804	0.392	8.481×10^{-4}	1.02	✕	
48	0.807	0.386	1.055×10^{-3}	0.95	✕		0.806	0.387	1.909×10^{-4}	0.23	✕	
	1　44 45 46 47 48　93						1　44 45 46 47 48　93					

降伏点番号	case2(c) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{46}\rvert}$	外部圧縮	内部膨張	case2(d) n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{46}\rvert}$	外部圧縮	内部膨張
44	0.994	0.012	8.647×10^{-5}	0.16	✕		0.994	0.013	3.681×10^{-4}	1.35	✕	
45	0.997	0.006	-2.328×10^{-4}	-0.42		◇	0.997	0.006	4.875×10^{-4}	0.18	✕	
46	1	0	-5.545×10^{-4}	-1		◇	1	0	-2.718×10^{-5}	-1		◇
47	0.804	0.393	1.153×10^{-3}	2.08	✕		0.803	0.394	1.276×10^{-4}	0.47	✕	
48	0.806	0.388	4.984×10^{-4}	0.9	✕		0.806	0.388	4.713×10^{-4}	1.73	✕	
	1　44 45 46 47 48　93						1　44 45 46 47 48　93					

降伏点番号	case3 n	m	$\frac{\dot{w}}{d\lambda}=n-p$	$\frac{\dot{w}}{\lvert\dot{w}_{45}\rvert}$	塑性変形形態 外部圧縮	内部膨張	降伏関節円
6	0.439	1	0	0			○
43	0.994	0.012	-7.217×10^{-4}	-0.52		◇	
44	0.502	0.996	2.815×10^{-3}	2.03	✕		
45	1	0	-1.390×10^{-3}	-1		◇	
46	0.505	0.99	2.479×10^{-3}	1.78	✕		
47	0.806	0.388	-4.470×10^{-4}	-0.32		◇	
	1　6　43 44 45 46 47　93						



図－11　各板厚における限界荷重係数と固定台間隔



図－12　各板厚における構造安定性余裕度と固定台間隔

(17)に定義される構造安定性余裕度が各固定台間隔に対する設計時の限界荷重係数を基準としているためである。このように、塑性崩壊荷重を用いて腐食水圧鉄管の構造安定性を定量的に評価することは可能であると考える。

5．結　　論

水圧鉄管のような、規模が大きく、破壊形態が複雑である構造物の塑性崩壊状態に関しては、塑性理論に基づく解析的な手法や、有限要素法によるアプローチの適用は困難と考えられる。そこで本論文では、このような問題に線形計画法が適用可能であることを示した。また、塑性理論に基づく理論解と併用し、破壊メカニズムおよび構造安定性についての詳細検討を試みた。水圧鉄管の塑性崩壊荷重は板厚と比例し、その関係は線形である。また、塑性崩壊荷重は固定台間の最小板厚にも強く依存し、応力的に最も厳しい断面に支配されることが確認できた。さらに、一つの試みとして、限界荷重係数を用いて腐食水圧鉄管の構造安定性に関する定量的な評価方法を提案した。

しかし、水圧鉄管の構造安定性に影響する要因は管内空虚時の限界座屈を含めて複雑であるため、今後、他の影響要素も考慮した合理的な評価方法について検討が必要であろう。

謝辞：本論文をとりまとめるにあたり、熊本大学工学部環境システム工学科大津政康教授には有益な助言を賜った。ここに記して謝意を表する。

付録

式(16)の誘導

釣り合い式および降伏後の流れ則から式(16)が導かれる。ここでは、式(7)および**図－5**に示す六角形の降伏条件の辺AB上に降伏が生じる場合について式(16)を導き、辺CD、DEおよびFAについては証明が類似するため、省略する。また、式(16)が辺BCおよびEFについても成り立つことを確認する。

まず、降伏後の流れ則より、式(13)に定義した一般化ひずみ速度ベクトルが降伏面ABに垂直していることから次の関係式が成り立つ。

$$\frac{-\dot{w}''/2\alpha^2}{-\dot{w}}=-\frac{1}{2} \tag{18a}$$

よって

$$\dot{w}''+\alpha^2\dot{w}=0 \tag{18b}$$

次に、降伏条件$m=2n-2$を釣り合い条件式(4)に代入することにより、nに関する二次微分方程式が以下のように導かれる。

$$n''+\alpha^2(n-p)=0,\ (n-p\neq 0) \tag{19a}$$

勾配が一定である固定台間の水圧が管路方向に線形的に変化することから、式(19a)は次のように変換できる。

$$(n-p)''+\alpha^2(n-p)=0 \tag{19b}$$

式(18b)と式(19b)はそれぞれ$\dot{w}$および$(n-p)$に関する線形二次微分方程式である。ここで任意の関数fを考え、$\dot{w}$と$(n-p)$の関係を

$$\dot{w}=f(n-p) \tag{20}$$

とすると、式(20)を式(18b)に代入することにより、次の非線形微分方程式が導かれる。

$$\frac{d^2f}{d(n-p)^2}[(n-p)']^2+\frac{df}{d(n-p)}(n-p)''+\alpha^2f=0 \tag{21}$$

式(19b)より、$f''=0$であり、fが$(n-p)$に関する一次関数となるから、式(16)が成り立つ。

材料の降伏が辺BCおよびEFに生じる場合は、mが一定となるため、式(4)より$n-p=0$となる。さらに式(16)より$\dot{w}=0$となり、流れ則より導かれた式(14)と同様な結果が得られる。

参考文献

１）Hodge, P.G.: *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York, 1959

２）Hodge, P.G.: *Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells*, Prentice-Hall, London, 1963

３）Paul, B., and Hodge, P.G.: Carrying capacity of elastic-plastic shells under hydrostatic pressure, *Proc. 3rd U.S. Natl. Congr. Appl. Mech*., pp.631-640, 1958

４）Prager, W.: *An introduction to plasticity*, Addison-Wesley, New York, 1959

５）Save, M.A., and Massonnet, C.E.: *Plastic analysis and design of plate*s, shells and disks, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1972

６）Tin-Loi, F., and Pulmano, V. A.: Limit loads of cylindrical shells under hydrostatic pressure, *J. Struct. Eng*., Vol.117, No.3, pp.643-656, 1991

７）Tin-Loi, F.: Optimal plastic design of arches, *Comput. Struct*., Vol.43, No.4, pp.675-679, 1992

８）Tin-Loi, F.: Plastic limit analysis, mathematical programming and gams, *Eng. Optim*., Vol.20, No.4, pp.273-286, 1993

９）Cinquini, C., Lamblin, D., and Guerlemen, G.: Limit analysis of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure. *J. Struct. Mech*., Vol.12, No.3, pp.263-278, 1984

10）Hodge, P.G.: The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells, *J. Appl. Mech*., Vol.21, pp.336-442, 1954

11）Maier, G.: A matrix structural theory of piecewise linear elastoplasticity with interacting yield planes, *Meccanica*, Vol.5, pp.54-66, 1970

12）Zavelani-Rossi, A.: A new linear programming approach to limit analysis, *Variational methods in engineering*, Vol.2, edited by C. A. Brebbia and H. Tottenham, Southampton University Press, Southampton, England, pp.8.64-8.79, 1973

13）Hill, R.: *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, 1950

14）Brooke, A., Kendrick, D., and Meeraus, A.: *GAMS: A user's guide*, The scientific press, California, 1988